Reszta wielomianu Taylora

$$\exists c_x \qquad R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x)$$

$$\alpha \leqslant x \leqslant \beta \qquad c_x \in [a, x] \qquad \text{nieznane}$$

Przykład:
$$e^x - p_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^c, \qquad n \geqslant 0$$

$$x = 1 \Rightarrow \quad e \cong p_n(x) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$e - p_n(1) = R_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!}, \quad 0 < c < 1$$

Czyli można ograniczyć $R_n(1)$

$$\frac{1}{(n+1)!} < R_n(1) \leqslant \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

Dla jakiego n $\quad R_n(1) \leqslant 10^{-9}$

$$\frac{3}{(n+1)!} \leqslant 10^{-9}$$

$$n \geqslant 12.$$